département de physique

faculté des sciences, oujda

Filières SMP-SMPC, S4

session normale, Année 2014/ 2015

Examen de Mécanique quantique

durée 1h30

Ex.I: (cours): sur la colonne gauche du tableau suivant, il y a des questions dont la réponse à chacune est parmi les suggestions sur la colonne droite, il est demandé de reporter la bonne réponse à chaque question sur la copie d'examen (la réponse doit être recopiée complètement comme suggérée, sinon la réponse sera rejetée):

Que veut dire :	Suggestions de réponse
1- hypothèse de Plank? 2- Hypothèse d'Einstein? 3- Hypothèse de de Broglie? 4- $\lvert\psi(x)\rvert^2$? 5-effet tunnel 6- principe d'indétermination de Heisenberg?	• on ne peut pas mesurer simultanément la position et l'impulsion d'une particule quantique. •les oscillateurs contenus dans les parois de la cavité ne peuvent émettre ou absorber de l'énergie que par quantités discrètes • la lumière est formée des corpuscules et chaque corpuscule ne peut être absorbé qu'entièrement et instantanément lors de l'interaction avec la matière. • lors d'une mesure on perturbe le système • quand on observe le caractère ondulatoire on perd toute possibilité d'observer le caractère corpusculaire. • la densité de probabilité de présence. • une particule quantique peut être vue aussi bien comme une onde que comme un corpuscule. • une particule quantique qui rencontre une barrière de potentiel peut traverser cette barrière même si son énergie est plus faible que la barrière. • la probabilité de trouver la particule dans l'espace.

Ex.II- On envoie sur une plaque métallique deux radiations électromagnétiques de longueurs d'ondes respectivement égales à λ_1= 2537 Å et λ_2= 5890 Å, on constate que l'énergie maximale des photoélectrons éjectés dans chaque cas a pour valeur:

-pour λ_1, E_1= 3,14 eV

-pour λ_2, E_2= 0,36 eV

1- Retrouver la valeur de la constante de Plank (h) (la vitesse de la lumière étant $c=3.10^8$m/s, , la fréquence $\nu=\frac{c}{\lambda}$), exprimer h en Mev.s.

2- Calculer l'énergie d'extraction minimale W_0 des électrons,

3- en déduire la valeur de la longueur d'onde maximale qui permet de produire l'effet photoélectrique

(Remarque: toutes les valeurs numériques à calculer doivent être données avec deux chiffres après la virgule et seule l'erreur sur ce deuxième chiffre après la virgule est acceptée.)

Ex.III- La fonction d'onde d'une particule ponctuelle est donnée par

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ Ce^{-x}(1 - e^{-x}), & si\ x > 0 \end{cases}$$

où C est une constante,

1-Déterminer la valeur de C qui permet de normaliser $\psi(x)$

2- Donner la valeur de la position de la particule où la densité de probabilité de présence est maximale (indication: une fonction f(x) possède un extrémum en x_m si sa dérivée en x_m est nulle: $f'(x_m)=0$)

3- Quelle est la valeur moyenne de la position de la particule <x>? (indication: on pourra utiliser l'intégration par partie)

Ex.IV- Soit l'espace de Hilbert ξ de dimension deux muni de la base orthonormée prise dans l'ordre $\{|u_1>, |u_2>\}$, et soit un opérateur $\mathcal{A}$ représenté dans cette base par la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix},$$

1- Cet operateur est-il hermétique? est ce une observable? justifier votre réponse

2- Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de A (les vecteurs propres doivent être normés et on les notera par $\{|v_1>, |v_2>\}$ et les valeurs propres associées par $\{a_1, a_2\}$)

3- Calculer la matrice de passage T de la base $\{|u_i>\}$ à $\{|v_i>\}$ (les éléments de la matrice T sont donnés par $T_{ij} = <u_i|v_j>$) et en déduire la matrice de l'opérateur $\mathcal{A}$ dans la base orthonormée $\{|v_1>, |v_2>\}$ qu'on note par A' (utilisez la formule $A' = T^{\dagger}AT$)

4- Calculer les opérateurs de projection sur les vecteurs kets $|v_1>$ et $|v_2>$, qu'on note respectivement par P_1 et P_2, dans la base $\{|u_1>, |u_2>\}$

5-**(question facultative)** On suppose que l'état du système quantique est donné par le ket $|\psi> = |u_1>$, calculer les quantités définies par:

- $P(a_1) = <\psi|P_1|\psi>$: c'est la probabilité de trouver la valeur a_1 lors de la mesure de la grandeur physique associée à l'observable $\mathcal{A}$ du système pris dans l'état $|\psi> = |u_1>$

- $P(a_2) = <\psi|P_2|\psi>$: c'est la probabilité de trouver la valeur a_2 lors de la mesure de la grandeur physique associée à l'observable $\mathcal{A}$ du système pris dans l'état $|\psi> = |u_1>$

que vaut $P(a_1) + P(a_2)$?

(barème: ExI: 3pts; ExII: 4pts; ExIII: 6pts; ExIV: 7pts + bonus de 2pts pour la question 5)

bon courage

Examen 2014-2015. (Norm)

· Questions de Cours :

* EX I

-1- Principe d'indétermination de Heisenberg :

On ne peut pas mesurer simultanément la position et l'impulsion d'une particule quantique.

-2- $|\Psi(x)|^2$ = densité de probabilité de présence.

-3- Effet tunnel : une particule quantique qui rencontre une barrière de potentiel peut traverser cette barrière même si son énergie est plus faible que la barrière.

-4- Hypothèse de Planck :

les oscillateurs contenus dans les parois de la cavité ne peuvent émettre ou absorber de l'énergie que par quantité discrètes.

5- Hypothèse d'einstein :

la lumière est formée des corpuscules et chaque corpuscule ne peut être absorbé qu'entièrement et instantanément lors de l'interaction avec la matière.

6- Hypothèse de Broglie :

une particule quantique peut être vue aussi bien comme une onde que comme un corpuscule

Ex II

$\lambda_1 = 2537 Å$, $E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = 3{,}14\ ev$.

$\lambda_2 = 5890 Å$, $E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = 0{,}36\ ev$.

- Équation d'Einstein de l'effet photo-électrique:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = h\nu - W_0 = h(\nu - \nu_s) \quad \text{avec } \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - W_0 \cdot (1) \quad \text{et} \quad E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - W_0 \cdot (2)$$

$$(E_1 - E_2) = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{hc(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$h = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (E_1 - E_2)}{C(\lambda_2 - \lambda_1)} = \left(\frac{E_1 - E_2}{\nu_1 - \nu_2}\right)$$

$$h = \frac{2537 \times 589 \cdot 10^{-19} (3{,}14 - 0{,}36)}{3 \cdot 10^8 (5890 - 2537) \cdot 10^{-10}} = 412{,}98 \cdot 10^{-17}\ evs$$

$$h = 4{,}1298 \cdot 10^{-15}\ evs \approx 4{,}13 \cdot 10^{-15}\ evs.$$

(en ev) $\underline{\underline{h}} = 4{,}13 \cdot 10^{-17} \times 1{,}6 \times 10^{-19} = 6{,}61 \cdot 10^{-34}\ Js$

(en J) $\underline{\underline{h}}$

$1\ Mev = 10^6\ ev. \Rightarrow \underline{\underline{h}} = 4{,}13 \cdot 10^{-21}\ Mevs$

2 - L'energie d'extraction minimale W_0:

$$E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - W_0 \Rightarrow W_0 = \frac{hc}{\lambda_1} - E_1 \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - W_0 \Rightarrow W_0 = \frac{hc}{\lambda_2} - E_2 \quad (4)$$

de (3) : $W_0 = \frac{4{,}13 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2537 \cdot 10^{-10}} - 3{,}14 = 1{,}74\, ev$.

on obtient la même valeur W_0 avec (4)

$$3 -\ W_0 = h\nu_s = \frac{hc}{\lambda_s} \Rightarrow \lambda_s = \frac{hc}{W_0}.$$

$$\lambda_s = \frac{4{,}13 \cdot 10^{-15} \times 3 \cdot 10^{8}}{1{,}74} = 7{,}12 \cdot 10^{-7} m = 0{,}71 \mu m$$

L'effet existe puisque $7120\,\mathring{A} = \lambda_s > (\lambda_1, \lambda_2)$

$$\Rightarrow (\nu_1, \nu_2) > \nu_s = c/\lambda_s.$$

<u>Ex-III</u> :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ C e^{-x}(1 - e^{-x}) & x > 0. \end{cases}$$

$$-1-\ \int_0^\infty |\varphi(x)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow |C|^2 \int_0^\infty e^{-2x}(1 - 2e^{-x} + e^{-2x})dx$$

$$|C|^2 \int_0^\infty (e^{-2x} - 2e^{-3x} + e^{-4x}) dx = 1.$$

$$|C|^2 \left\{ -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{2}{3} e^{-3x} - \frac{1}{4} e^{-4x} \right\}_0^\infty = 1.$$

$$|C|^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right\} = 1 \Leftrightarrow |C|^2 = 12 \Rightarrow |C| = 2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \varphi(x) = 2\sqrt{3}\, e^{-x}(1 - e^{-x})$$

$$|\varphi(x)|^2 = 12(e^{-2x} - 2e^{-3x} + e^{-4x})$$

2 - $|\phi(x)|^2$ est max si $\frac{d}{dx}|\phi(x)|^2 = 0$.

$$12(-2e^{-2x} + 6e^{-3x} - 4e^{-4x}) = 0$$

$$e^{-2x}(-1 + 3e^{-x} - 2e^{-2x}) = 0.$$

$e^{-2x} = 0$ qd $x \to +\infty$.

$(1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x}) = 0$ si $x = 0$

Pour $x = 0$, $x \to \infty \Rightarrow$ la densité de Prob $= 0$.

3 - $\langle x \rangle = \langle \psi | x | \Psi \rangle = \int_0^\infty \Psi^* x \Psi \, dx$

$= \int_0^\infty x|\psi(x)|^2 dx = \int_0^\infty f_{ct\ imp}\, dx = 0$

$\underline{\qquad\qquad = 0 \qquad\qquad}$

Ex IV

$B = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

1 - A est hermitique, symetrique / à la diag :

$$A^*_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = A_{ij}$$

- A est une observable puisque les $\vec{v}_p$ forment un système Complet c-a-d une base de l'espace des états H.

2 - Calcul des v_p : si $\exists$ des $\vec{v}_p$ ils s'écrivent Comme $|v_i\rangle = \alpha|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

on a : l'éq t aux v_p :

$$A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = a_n\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\left[A - a_n \mathbb{1}\right]\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det\begin{vmatrix}-a_n & -4\\ -4 & 6-a_n\end{vmatrix} = 0$$

$$-a_n(6-a_n) - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$a_n^2 - 6a_n - 16 = 0 \Leftrightarrow (a_n+2)(a_n-8) = 0$$

$$a_1 = -2 \ , \ a_2 = 8 .$$

* Calcul des $\vec{v}_p$: $\begin{pmatrix}-a_n & -4\\ -4 & 6-a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0.$

$$\begin{cases} -a_n\alpha - 4\beta = 0 \\ -4\alpha + (6-a_n)\beta = 0 \end{cases} \quad *$$

$\Rightarrow$ le 1$^{\text{er}}$ $\vec{v}_p$ associé à ~~à~~ a_1 : $a_1 = -2$ est $|v_1\rangle$

$$\begin{matrix} 2\alpha - 4\beta = 0 \\ -4\alpha + 8\beta = 0 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = 2\beta .$$

$|v_1\rangle = 2\beta|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle$, reste β à calculer par normalisation : $\langle v_1|v_1\rangle = 1$.

$$|2\beta|^2 + |\beta|^2 = 1 \Rightarrow 5|\beta|^2 = 1 \Rightarrow |\beta| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{|v_1\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|u_2\rangle}$$

$$\to A' = T^{+} A T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt5 & 1/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 & -2/\sqrt5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\sqrt5 & 1/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 & -2/\sqrt5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/\sqrt5 & 1/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 & -2/\sqrt5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4/\sqrt5 & 8/\sqrt5 \\ -2/\sqrt5 & -16/\sqrt5 \end{pmatrix}$$

$$\to A' = \begin{pmatrix} -10/5 & \cancel{2/5} \\ 0 & -40/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

* 4 - $\to P_1 = |v_1\rangle\langle v_1| = \begin{pmatrix} 2/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\sqrt5 & 1/\sqrt5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

$\to P_2 = |v_2\rangle\langle v_2| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 \\ -2/\sqrt5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt5 & -2/\sqrt5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -\frac{2}{5} & 4/5 \end{pmatrix}$

$\sum_i P_i = |v_i\rangle\langle v_i| = \mathbb{1}$ voir 1

* 5 - $|\psi\rangle = |u_1\rangle$

$\to P(a_1) = \langle\psi|P_1|\psi\rangle = \langle u_1|v_1\rangle\langle v_1|u_1\rangle$
$= |\langle u_1|v_1\rangle|^2 = 4/5.$

$\to P(a_2) = \langle\psi|P_2|\psi\rangle = \langle u_1|v_2\rangle\langle v_2|u_1\rangle =$
$= |\langle u_1|v_2\rangle|^2 = 1/5.$

$P(a_1) + P(a_2) = 1 \Rightarrow P(a_2) = 1 - P(a_1)$

tout simplement !